Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Géométrie affine

1) Espace affine, sous-espace affine

Définition 1. Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine s'il existe une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ qui à $A, B \in \mathcal{E}$ associe un vecteur $\overrightarrow{AB} \in E$ telle que :

(i) Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $B \longmapsto \overrightarrow{AB}$ est linéaire.

(ii) $\forall\, A, B, C \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Exemple 2. *L'ensemble vide et les $\mathbb{R}^n$ sont des espaces affines.*

Proposition 3. *Pour tous $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AA} = 0$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.*

Définition 4. On dit qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine s'il est vide ou s'il contient un point A tel que $\left\{\overrightarrow{AB} \,\middle|\, B \in \mathcal{F}\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit A un point de $\mathcal{E}$. Il existe un unique sous-espace affine dirigé par F et passant par A.*

Exemple 6. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système sans second membre associé.*

Définition 7. On appelle droite (resp. plan) tout espace affine de dimension 1 (resp. 2).

Définition 8. Deux espaces affines de même direction sont dits parallèles.

Exemple 9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Tous les $f^{-1}(v)$, où $v \in \mathrm{Im}(f)$, sont parallèles et dirigés par* $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition 10. *Pour tout point d'un espace affine, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.*

2) Application affine

Définition 11. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines dirigés respectivement par E et F. Une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine s'il existe un point $O \in \mathcal{E}$ et une application linéaire $\overrightarrow{\varphi} : E \to F$ tels que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$. L'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$.

Proposition 12. $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ *est un groupe.*

Proposition 13. *Si E et F sont deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines naturelles, une application $\varphi : E \to F$ est affine si, et seulement si, il existe un vecteur $x_0 \in F$ et une application linéaire $\overrightarrow{\varphi} : E \to F$ telle que, pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = \overrightarrow{\varphi(x)} + x_0$.*

Exemple 14. *(i) Si $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$, les applications affines sont les applications de la forme $x \longmapsto ax + b$.*

(ii) Si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, les applications affines dont l'application linéaire associée est Id_E sont les translations.

Proposition 15. *L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

Corollaire 16. *Les applications affines conservent l'alignement, le parallélisme et les barycentres.*

3) Utilisation du groupe affine

Théorème 17 (Thalès)**.** *Soient d, d', d'' des droites parallèles distinctes, D_1, D_2 deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient, pour $i \in \{1, 2\}$, $A_i = D_i \cap d$, $A_i' = D_i \cap d'$, $A_i'' = D_i \cap d''$. Alors $\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$. Réciproquement, si un point B de D_1 vérifie $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$, alors $B = A_1''$.*

Corollaire 18. *Soient D_1, D_2 deux droites sécantes en A, d, d' deux droites parallèles coupant D_i en A_i, A_i' distincts de A. Alors $\frac{\overline{AA_i}}{\overline{AA_i'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}$.*

Théorème 19 (Pappus)**.** *Soient D, D' des droites distinctes, A, B, C des points de D et A', B', C' des points de D'. Si (AB') est parallèle à $(A'B)$ et (BC') est parallèle à $(B'C)$, alors (AC') est parallèle à $(A'C)$.*

Théorème 20 (Desargues)**.** *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.*

II Géométrie euclidienne

1) Définition et groupe d'isométrie

Définition 21. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace vectoriel euclidien. Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien. On définit la distance de deux points A et B par $d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

Définition 22. Pour $A \subset \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{E}$, la distance de x à A est :

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

Proposition 23. *Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $y \in E$ est la projection orthogonale de x sur F si, et seulement si, $y \in F$ et $d(x,F) = \|x-y\|$.*

Définition 24. Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E dans E.

Remarque 25. *Une isométrie vectorielle conserve le produit scalaire, donc l'orthogonalité.*

Définition 26. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens. Une isométrie affine est une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A,B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Exemple 27. *Les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.*

Proposition 28. *Une application affine est une isométrie affine si, et seulement si, sa partie linéaire est une isométrie vectorielle.*

Théorème 29. $(\mathcal{O}(E), \circ)$ *et* $(\mathrm{Isom}(\mathcal{E}), \circ)$ *sont des groupes.*

Proposition 30. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par une isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par f.*

2) Matrice et déterminant de Gram

Définition 31. On appelle matrice de Gram de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la matrice $M_G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemme 32. *Le déterminant de Gram d'une famille de vecteurs est nul si, et seulement si, elle est liée.*

Théorème 33. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$d(x,F)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$$

Théorème 34 (Hadamard)**.** *(i) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$.

Dans les deux cas, on a égalité si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

3) Similitudes et nombres complexes

Définition 35. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude vectorielle s'il existe $k > 0$, appelé rapport de la similitude, tel que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = k\|x\|$. On appelle similitude affine toute application affine dont la partie linéaire est une similitude vectorielle.

Exemple 36. *Les isométries et les homothéties sont des similitudes.*

Définition 37. Une similitude est dite directe ou indirecte selon que son déterminant est positif ou négatif.

Proposition 38. *Soit f une similitude vectorielle de rapport k. Il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $f = h_k \circ u$, où h_k est l'homothétie de rapport k.*

Proposition 39. *(i) Les similitudes directes conservent les angles.*

(ii) Une similitude directe de rapport k envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR dont le centre est l'image du centre.

Application 40. *On identifie le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé avec le plan complexe $\mathbb{C}$. Les similitudes directes sont de la forme $z \longmapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$. Les similitudes indirectes sont de la forme $z \longmapsto a\bar{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$.*

III Polygones et polyèdres convexes

Définition 41. Un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ est dit régulier si tous ses côtés sont de même longueur, et si les angles entre deux côtés sont égaux.

Définition 42. On appelle groupe diédral le groupe D_n formé des isométries du polygone régulier à n cotés.

Proposition 43. *D_n est engendré par une symétrie et une rotation.*

Définition 44. Un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$ est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques, et si en chaque sommet elles s'assemblent de la même manière, au sens où les figures formées par les réunions des arêtes aboutissant à un sommet sont isométriques.

Exemple 45. *Il y a 5 polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.*

Théorème 46. *Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien de dimension 3. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ des isométries préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Application 47. *La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :*

$\mathfrak{S}_4$	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
θ	2	0	2	-1	0

IV Coniques

Définition 48. Une fonction polynômiale de degré 2 sur $\mathcal{E}$ est une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un point $O \in \mathcal{E}$, une forme quadratique non nulle q sur E, une forme linéaire L_0 sur E et une constante $c_O \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, M \in \mathcal{E},\ f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$.

Remarque 49. *q ne dépend pas du point d'origine O choisi.*

Définition 50. On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'une fonction polynômiale de degré 2 $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sous la relation "$f \sim g$ si, et seulement si, g est un multiple scalaire de f". Une quadrique plane est appelée conique. L'ensemble des points de E vérifiant $f(M) = 0$ est l'image de la quadrique.

Remarque 51. *Les équations $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + 1 = 0$ définissent le même ensemble de points du plan $\mathbb{R}^2$.*

Définition 52. La quadrique définie par $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$ est dite propre si la forme quadratique $Q(x, y, z) = q(x, y) + L(x, y)z + cz^2$ définie sur $E \times \mathbb{R}$ est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite homogénéisée de q.

Proposition 53 (Classification des coniques propres)**.**

sgn(Q)	*sgn(q)*	*Classe*	*Exemple*
$(3,0)$ *ou* $(0,3)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$\varnothing$	$x^2 + y^2 = -1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	*Ellipse*	$x^2 + y^2 = 1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(1,1)$	*Hyperbole*	$x^2 - y^2 = 1$
$(2,1)$ *ou* $(1,2)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Parabole*	$x^2 + y = 0$

Proposition 54 (Classification des coniques impropres)**.**

sgn(Q)	*sgn(q)*	*Classe*	*Exemple*
$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	*Point*	$x^2 + y^2 = 0$
$(2,0)$ *ou* $(0,2)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	$\varnothing$	$x^2 = -1$
$(1,1)$	$(1,1)$	*Droites sécantes*	$x^2 - y^2 = 0$
$(1,1)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Droites parallèles*	$x^2 = 1$
$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	$(1,0)$ *ou* $(0,1)$	*Droite double*	$x^2 = 0$

Développements

— Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard (32,33,34) [Gou08]
— Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et isométries du tétraèdre (46,47) [Ser70]

Références

[Aud06] M. Audin. *Géométrie.* EDP Sciences
[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann

Annexes

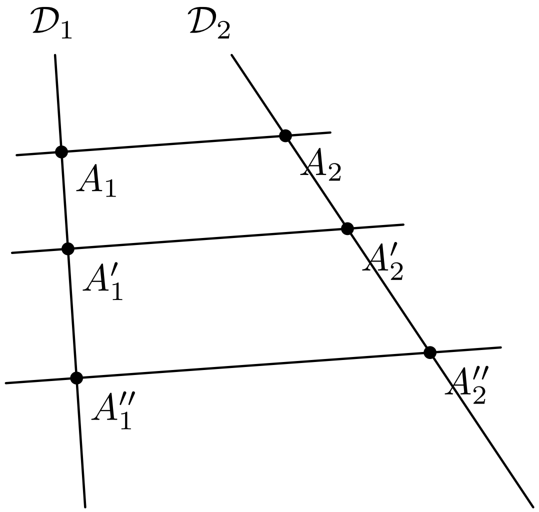

Figure 1 – Théorème de Thalès

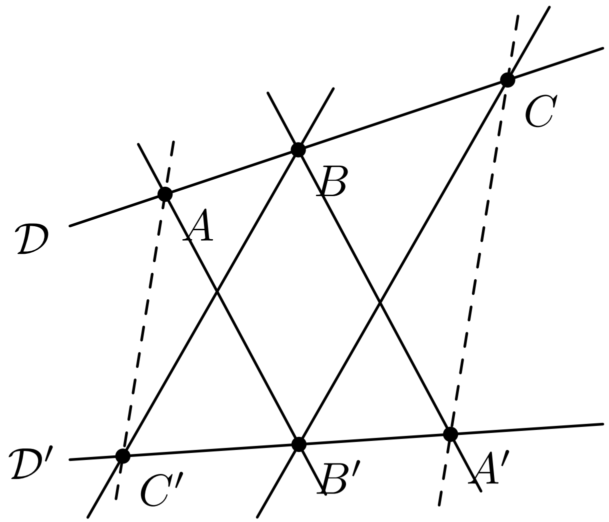

Figure 2 – Théorème de Pappus

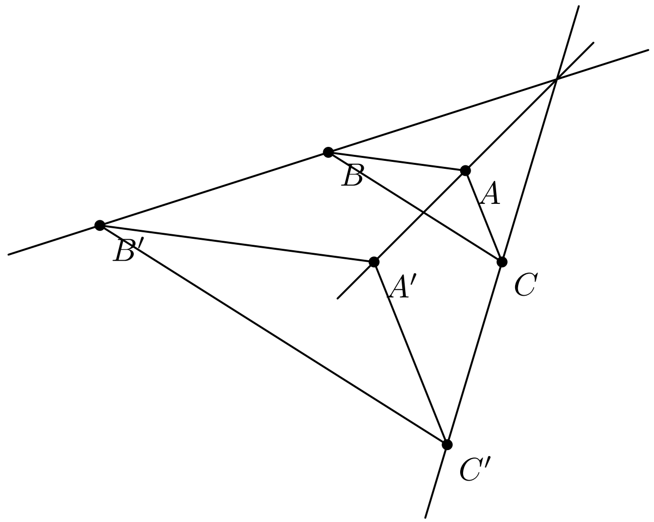

Figure 3 – Théorème de Desargues